

指导教师： 杨涛

提交时间： 2015/3/29

The task of
Digital Image Processing

数字图像处理

School of Computer Science

No: 01

姓名： 鲍越

学号： 2012302530

班号： 10011206



重温三目摄像机几何学

Jean Ponce*

Ecole normale supérieure

Martial Hebert

Carnegie-Mellon University

摘要

什么时候我们的视线和三目镜对应的收敛点相联系,即两者相交于一点时?传统的三目摄像机的几何模型基于基础模型和三焦点的张量与相机相关只提供部分基础问题的答案,因为绝大部分是潜在的,但是也有极少明显大体的结构设想。本文使用摄影几何学的基本工具去提供必要和足够的几何分析条件收敛依据三目镜的视线传送而没有任何的假设。反过来。这也为共线或非共线的针孔摄像机产生了简单新奇的最小参数化三目镜几何学。

介绍

通过多个摄像头记录的点像或许仅能匹配当视线交于共同点的相应的点(左1图)。对两种不同的观点,这种情况是被双线性极线约束和对应的基本模型捕获的[8, 9]。这三种意像可以通过成对的极线约束与任意两张图片的结合,和一组三线性度与这三个观点相关参数化的三目镜的张量的结合来表示[5, 15, 16, 22]。对于非共线的针孔摄像头来说,与三个点像结合的满足相应的极线约束的射线大多都是收敛的:唯一的例外是当这些点已错误匹配和所有位于穿过三个小孔的三目镜平面(右图1)。

有趣的是, Hartley and Zisserman 状态即基本模型和三个非线性的针孔摄像头共同决定相应的三目镜张量[6, Result 14.5], 然而 Faugeras and Mourrain [3] and Pon

ce et al. 比如记录下那些仅能满足确定而不同的三线性度的子集必定相交的三点和线的结合。他们彼此之间是相互矛盾的,由于满足极线约束不总是收敛的,但他们的确是在大体的结构猜想下,很难去详述。因此值得澄清这些假设和理解多少三焦点的约束添加到极线的对应点。这是本文解决的问题,使用基本射影几何。特别是,我们的分析表明,利用极线约束和一个或两个三目的的,根据摄像机针孔是否共线,总是保证相应的视觉射线的收敛。特别是,我们的分析表明,利用极线约束和一个或两个三目的的,根据摄像机针孔是否共线,总是保证相应的视觉射线的收敛。

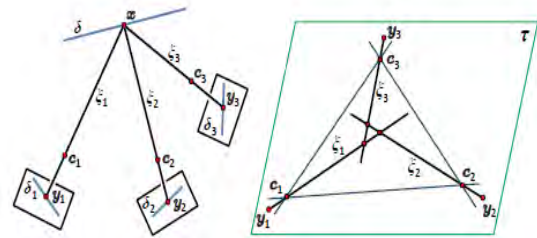


图1左:视觉射线与三(正确)通讯

图1右:简并与两种几何约束三个共面,但不相交的线位于三目镜平面上(在本报告的其余部分,图像平面是忽略了在这个图的一部分)有关详细信息,请参阅文本。

1.1 相关的工作

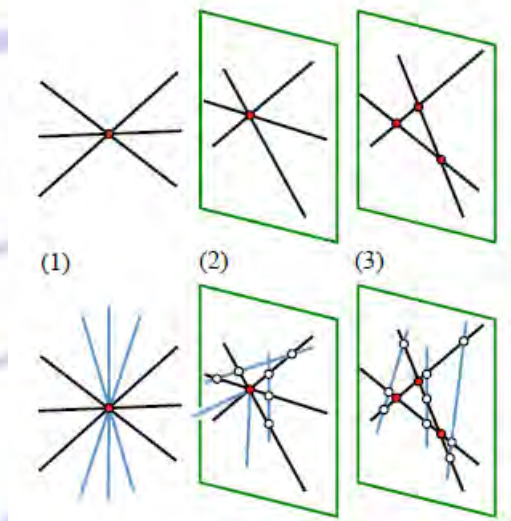
同一点的几何约束涉及多个角度视图(图1中,左)以来,计算机视觉研究了热的开创性工作——希金斯,他在1981年提出的基本矩阵作为一个双线性模型两个校准相机[8]两种几何约束。其未校准的,基本矩阵,介绍了由 Luong 和 Faugeras [9]。三线的约束与一条直线被发现三个观点 Spetsakis 和 Aloimonos [16], by Weng, Huang 和 Ahuja [22]。未校准的情况下解决了 Shashua [15] Hartley [5], 谁创造了这个词集中张量。四焦张量是由特里格引入 [20], 和 Faugeras, Mourrain 给一个简单的表征的多重线性约束与多个角度的图像点 [3] 通常制定的三线的约束三个图像相同的点是

不对称的, 图片扮演特权角色之一。一个简单的和基于线几何对称制定了[12]。

从历史学的角度看, 值得注意的是极线约束早在很久以前就被Longuet-Higgins用摄影测量仪发现, 虽然在 1966 年的手册中已经记录, 但在本书中并没有提到三线性约束, 尽管它已经介绍了高级三目镜摄像机。

三目镜约束的直接来源为了经典对应点相当于写下一些 $K \times 4$ 的矩阵的所有 4×4 的部分为0, 从而保证了三行相交【3, 12】. 这些因素被重写为线性组合减少未成年人的双线性或三线的函数图像的点坐标。整个困难在于选择一个适当的减少未成年人的子集, 将永远保证射线相交。

我们已经观察到双线性极线约束, 仅是不够的。我们不知道任何固定的四个 trilinearities, 孤独, 在所有情况下都保证收敛。这表明寻求合适的双线性组合而不是和三线的限制, 这是这个演示中所采取的方法。



1. 2. 问题陈述和建议的方法

正如前面提到的, 本文的目的是理解究竟多少集中增加极线约束对应的点。因为这两种类型的入射光之间的关系约束模型 光线进入相机的小孔观察到的点, 我们利用射影几何的工具解决这个问题[21]一般而言, 尤其是和线几何[13]。作为前面的前提, 三

目镜的张量最初是发明用来描述三条图像扫描线 $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ 是同样的线 δ

【15, 16, 22】的投影 (图 1 左)。因此多数展示将致力于一系列三重线的截线的特性描述就不足为奇了。

特别是, 我们已经知道了三线相交成对出现十分必要, 但却不认为这些线必定相交。我们将在剩下的展示中说明三线手链的一个必要充分条件是它们必须两两共勉且横线确是一个意义明确的组合。我们也将给出这些不同猜想下的横线的集合分析表征。当它应用到摄像系统中, 它将提供一个全新的简单三目几何学的最小参数。

贡献

我们在这些线的横线方面给出一个新的收敛线的三焦集合特性 (命题 1) .

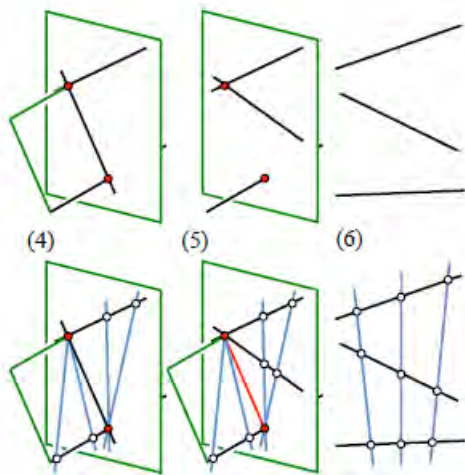
我们提供一个三胞胎的会聚线的新颖简单的分析表征 (引理 3 和命题 2), 这并不依赖于隐含在【12】里的大体猜想。

我们通过应用相机几何的这些结果即这三个极线约束和三焦点之一 (两个小孔是否共线) 是满足相应的光线收敛必要充分条件来进行说明 (命题 3 和 4)。

我们引入一个新的分析核线的参数化和三焦点的约束, 导致最小的参数化三目的几何线条的三焦收敛 (命题 5 和 6)。

2. 1 几何的观点

从现在起所有假设所有的线都是完全不同的。一条线组的截线是一条相交于线组中每一条线的线。本节以下为证明出来的主要结果。



命题 1. 三线收敛的一个充分必要条件是它们必须两两共面且他们承认横向不包含在定义的任意两个平面。

证明命题 1，我们需要两个中间结果。在摄影几何学中，两条直线相互倾斜或共面，在这种情况下他们相交在一个点。我们的第一个论点列举了三线之间的关系可能发生率。

论点 1. 在六个确定的立体矩阵中可以看到三条完全不同的线（图 2, 3 上）：（1）这三条线不完全共面且交于一点；（2）他们共面且两两相交于三个不同的点；（3）他们共面且交于一点；（4）他们之中确定的两对共面；（5）他们之中确定的两条共面；或（6）他们两两斜交。

列举论证。 论点 1 有一个直接重要的推论——就是，当三条线两两共面，都不相交于一点（例 1）；他们共面且相交于一点（例 2）；或他们共面且相交于两个过三个不同的点（例 3）。特别是，极线约束满足三目镜的（错误的）对应于三焦点平面的点的图像包含三个不共线的针孔摄像机。

更进一步说，介绍一个线条间的线性依赖十分有用。线条独立性的几何定义通常与线性无关的代数定义相匹配，给定一个系统坐标系， k 线线性相关的充分必要条件是若干

Plücker 坐标向量的线性组合成为 \mathbb{R}^6 的零

向量（2.2.1 节）。几何学上，这些线线性依赖于 **regulus** 的三条斜线【21】。**Regulus** 是线场中的任意一个，包络一个平面中的所有线；一个线束，包络经由若干点的所有线；所有线的集合属于两个不同平面相交的同一条线；或一个非退化的 **regulus** 包络两组线之一支配一个单叶双曲面或一个双曲抛物面。可以递归地定义四条或以上的线条的线性相关。带着这些引理 1 的定义，我们获得一个重要的推论。

引理 2. 在六个立体矩阵中可以看出，三个完全不同的线存在无穷多的截线（图 2, 3 底部）：（1）这些截线构成一个线束；（2）他们构成一个线场和一个线束的简并与组织；（3）他们组成一个线场；（4）他们组成的两个线束有共同的输入线的其中之一；（5）他们组成的两个线束有一条线经过两个输入线的交点；或（6）他们组成一个非退化的 **regulus**，三条输入线在同一刻度和在另一个截线。

引理 2. 不应出人意料地从截线到三条给定的线满足三个线性约束从而组成一个三等组合（退化一致性是一个四级的例外【21】）。没有额外的猜想，大体没有什么可说的，由于引理 2 告诉我们任意三条不同的线可以有无穷多的截线。此外，当线路两两共面，在引理 2 例 4 - 6 被排除，我们立即可以获得命题 1 这个引理的推论。

2.2. 观点分析

2.2.1 正文前文

为了把前面部分的几何结果翻译成分析成果，有必要回忆一些大体的射影几何学和特定的直线几何学的基本事实。熟悉

Plücker 坐标和链接操作符等的读者可以很好地继续 2.2.2 节。给定一些二维射影空间 \mathbb{P}^2 ，和其中的点、线可以被视为与他们在

\mathbb{R}^3 的齐线坐标向量相等。此外，如果 x 和 y 是 \mathbb{P}^2 平面的同一条线 ξ 的两个不同的点，我们有公式 $\xi = x \times y$ 。点 X 在线 ξ 上的充分必要条件是 $\xi \cdot x = 0$ 且两条线相交

于确定的一点或重合。三条线相交的充分必要条件是它们线性相关或 $\text{Det}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ 。

在三维空间中，给定任何一个三维射影空间 \mathbb{P}^3 的坐标系的选择，我们可以识别 \mathbb{P}^3 中的任何一条线以及它在 u 和 v \mathbb{R}^3 的向量的 \mathbb{R}^6 中的 Plücker 坐标向量 $\xi = (u; v)$ ，我们用一个分号来指示 u 和 v 的坐标彼此堆叠形成一个 \mathbb{R}^6 中的向量。此外，如果 x 和 y 是 \mathbb{P}^3 平面的某些线 $\xi = (u; v)$ 上的两个不同的点，我们有

$$u = \begin{bmatrix} x_4y_1 - x_1y_4 \\ x_4y_2 - x_2y_4 \\ x_4y_3 - x_3y_4 \end{bmatrix}, \text{ and } v = \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

一个 Plücker 坐标向量仅仅是定义了扩展，它的 u 和 v 部分是通过构造正交传递给彼此的一

这就是被称为克莱恩约束的 $u \cdot v = 0$ 。让我们考虑一下对称双线性形式 $\mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6$ 与标量 $(\lambda|\mu) = a \cdot d + b \cdot c$ 的 \mathbb{R}^6 中的两个要素

$\lambda = (a; b)$ 和 $\mu = (c; d)$ 相联系。一个 \mathbb{R}^6 的非零向量 ξ 的充分必要性代表一条线是 $(\xi|\xi) = 0$ ，两条线 λ 和 μ 是共面（或相等，相交）的充分必要条件是 $(\lambda|\mu) = 0$ 。

我们通过 x_0 到 x_4 和坐标

$$x_0 = (0, 0, 0, 1)^T, x_1 = (1, 0, 0, 0)^T, x_2 = (0, 1, 0, 0)^T, x_3 = (0, 0, 1, 0)^T, x_4 = (1, 1, 1, 1)^T$$

指定任意的投影坐标系。点 x_0 到 x_3 被称为基点。点 x_4 是单位点。我们定义四个基面 $P_j (j = 0, 1, 2, 3)$ ，其坐标向量与基点的相同。两个不同点的唯一连线被称作这些点的连线而且它表现为 $x \vee y$ 。同样的，一条线 $\xi = (u; v)$ 和不是这条线上的点 x 确定的唯一平面被称作 ξ 和 x 的连线，用于 $\xi \vee x$ 。

在代数方面，我们有 $\xi \vee x = [\xi_\vee]x$ ，其中

$[\xi_\vee]$ 是定义的矩阵连线

$$[\xi_\vee] = \begin{bmatrix} [u_\times] & v \\ -v^T & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

点 x 位于线 ξ 的一个充分必要条件是

$$\xi \vee x = 0.$$

2.2.2 回顾截线

我们把在上节出现的几何约束发生率翻译成代数的。我们假设这些射影坐标系是给定的，而且定义了他们的齐线坐标向量的点、面和线。我们认为三条不同的线

$\xi_j = (\xi_{1j}, \dots, \xi_{6j})^T (j = 1, 2, 3)$ 和定义

$$D_{ijk} = \begin{vmatrix} \xi_{i1} & \xi_{i2} & \xi_{i3} \\ \xi_{j1} & \xi_{j2} & \xi_{j3} \\ \xi_{k1} & \xi_{k2} & \xi_{k3} \end{vmatrix} \quad (3)$$

称为 6×3 矩阵 $[\xi_1, \xi_2, \xi_3]$ 的 3×3 部分对应于对应它的 i, j 和 k 行。一个矩阵要有 2 个队列的充分表条件是所有的部分

$$T_0 = D_{456}, T_1 = D_{234}, T_2 = D_{315},$$

$$T_3 = D_{126} \text{ 等于零。}$$

引理 3. 给定 $\{0, 1, 2, 3\}$ 中的一些整型 j ，

ξ_1, ξ_2 和 ξ_3 存在一条截线经过 x_j 的充分必要条件是 $T_j = 0$ 。

论据。条件显然是必要的。由于极线约束，三条线必须共面且两者之一在同一平面的三个不同的点相交，相交于一个单点或与基线重合。除非点 x_0 位于包含折现线的平面 π_0 (图 5)，通过式子 $T_0 = 0$ 排除例 1。如

果点 x_0 在 π_0 上而 x_j 不在, 那么通过 $T_j = 0$ 例 1 就可排除了。

e., $k=1, 2, 3$, π_{ij}^k 表示 π_{ij} 的坐标的第 k 个。

3.3. 最小参数化

3.1.1 针孔不共线

我们在这一段中假设三个小孔是不对齐的。这种情况下, 我们通常选择一个投影坐标系从而让三个基点有别于三个相机中心 x_0 一即 $c_j = x_j$ 在 $j = 1, 2, 3$ 和 x_0 不在三目镜平面上时。

随着坐标系的选择,

$$y_j = (y_{1j}, y_{2j}, y_{3j}, y_{4j})^T, \text{ 这三个极线}$$

约束可以写成

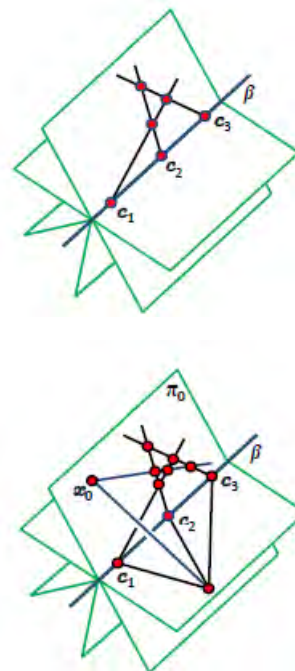
$$\begin{aligned} (x_1 \vee y_1 | x_2 \vee y_2) = 0 & \quad y_{41}y_{32} = y_{31}y_{42} \\ (x_1 \vee y_1 | x_3 \vee y_3) = 0 & \iff y_{41}y_{23} = y_{21}y_{43} \quad (4) \\ (x_2 \vee y_2 | x_3 \vee y_3) = 0 & \quad y_{42}y_{13} = y_{12}y_{43} \end{aligned}$$

给定这些约束, 我们从命题 2 中了解了三条视线相交的充分必要条件是 $T_0 = 0$ (其他三目摄像机无法满足我们选择的坐标系), 这就可以把我们的例子简单改写成

$$y_{21}y_{32}y_{13} = y_{31}y_{12}y_{23}.$$

当且仅当 y_j 位于 p_0 时记下 $y_{4j} = 0$, 这也是我们举的例子中的三目镜平面。不出所料, 它直接遵循 Eqs. (4) 和 (5), 除非 $y_{41} = y_{42} = y_{43} = 0$, 即观察点位于三目镜平面, 极线约束隐含在其中。现在我们需要在图形坐标系中把 Eqs. (4-5) 翻译成对应的方程式。我们通过几点的坐标向量组成的 4×3 矩阵的 $\Pi_j (j = 1, 2, 3)$ 表示 j 号照相机的视网膜平面。这些坐标向量和像素点的位置在 $y_j = \Pi_j u_j$ 中。我们通过矩阵 Π_j 的

π_{ij}^T 的第 i 行表示和使用坐标索引的上标, i ,



命题 5. 给定三个不共线的针孔摄像机和假定的点 u_1, u_2 和 u_3 , 三跳对应的线收敛的充分必要条件是

$$\begin{aligned} u_1^T F_{12} u_2 = 0 & \quad F_{12} = \pi_{41} \pi_{32}^T - \pi_{31} \pi_{42}^T \\ u_1^T F_{13} u_3 = 0 & \quad \text{where } F_{13} = \pi_{41} \pi_{23}^T - \pi_{21} \pi_{43}^T \\ u_2^T F_{23} u_3 = 0 & \quad F_{23} = \pi_{42} \pi_{13}^T - \pi_{12} \pi_{43}^T \end{aligned}$$

$$(6) \quad (5)$$

和

$$(\pi_{21} \cdot u_1)(\pi_{32} \cdot u_2)(\pi_{13} \cdot u_3) = (\pi_{31} \cdot u_1)(\pi_{12} \cdot u_2)(\pi_{23} \cdot u_3) \quad (7)$$

向量

$$\pi_1 = (\pi_{21}; \pi_{31}; \pi_{41}), \quad \pi_2 = (\pi_{12}; \pi_{32}; \pi_{42}), \quad \text{和 } \pi_3 = (\pi_{13}; \pi_{23}; \pi_{43}),$$

满足 6 次齐线收敛

$$\begin{aligned} \pi_{21}^1 = 0, \quad \pi_{32}^2 = 0, \quad \pi_{13}^3 = 0, \\ \pi_{31}^2 = \pi_{41}^3, \quad \pi_{12}^3 = \pi_{42}^1, \quad \pi_{23}^1 = \pi_{43}^2, \end{aligned} \quad (8)$$

从而是 7 个系数的三组定义, 每个都唯一确定一个分离比例。这是一个最小的 18 自由度的三目几何学的参数化。

论据。方程(6)和(7)是通过替代 Eqs. (4)和(5)直接获得的。同时,他们通过三个向量 $\pi_j = (\pi_{1j}; \pi_{2j}; \pi_{3j}) (j = 1, 2, 3)$ 提供了一个三目镜几何学的 24 自由度的参数设定,每个都用 8 个独立参数确定了 \mathbb{R}^9 的比例。在基点 $x_j (j = 1, 2, 3)$ 固定 15 个之中的 9 自由度的不确定的射影结构上安置针孔摄像机。利用剩下的 6 自由度和向量 π_j 上的 Eq. (8) 的约束是可能的。

确实,一个投影变换 Q 的一般式绘制三个基点 x_j 自身映射有 7 个系数明确比例。应用这个矩阵 $\Pi_j (j = 1, 2, 3)$ 的变换定义在若干投影坐标系中,写下矩阵 $Q\Pi_j$ 必须满足 Eq.

(8)的约束产量一系列的 6 个其次方程在 Q 的 7 个非零项。我们可以通过选择向量 π_1, π_2 和 π_3 的不同的项组产生许多不同的齐次约束。可以表明总有一些选择为了定义系统 Q 承认一个唯一的解决方案来确定比例,这个方案就是满秩,从而定义一个坐标的有效变化。同时, Eqs. (6), (7) 和 (8) 通过三个向量 π_1, π_2, π_3 给我们提供了一个最小的 18 自由度的三目几何学的参数化,现在每个只需 \mathbb{R}^9 中的 6 个独立参数计科确定比例。

我们知道, Papadopoulo 和 Faugeras 【11】提出的三目镜几何学的最小参数化是至今唯一一个一对一的参数化(其他的最小的,例如【1, 19】利用代数约束)。与【11】相反,我们的参数化并不需要使用计算机代数系统去影响队列约束(详见【11】)。此外,我们的参数化是对称的,没有任何一个相机闲着。

我们通过解释 Eq. (7) 的一个有趣的集合解释结束这段: 第一张图像中的任意一点的坐标向量 u_1 都与其他两个坐标向量 u_2, u_3 的

点相匹配,且必须满足方程(7)属于“三目线”(我们的术语):

$$\tau_1 = [(\pi_{32} \cdot u_2)(\pi_{13} \cdot u_3)]\pi_{21} - [(\pi_{12} \cdot u_2)(\pi_{23} \cdot u_3)]\pi_{31}. \quad (9)$$

不足为奇,由于经典三目镜几何学是依据对应线定义的, Eq. (7) 仅仅表达了像素点 y_1 位于经过点 x_0 的线 τ_0 投影 τ_1 上的事实,相交线经过其他两个像素点 y_2, y_3 。人们所不知道的是线 τ_1 属于线 π_{21} 和 π_{31} 产生的线束,线束相交于第一个图像的一点 $z_1 = \pi_{21} \times \pi_{31}$ 。其他两个图像也是同理。

3.3.2 针孔共线

现在我们假设这三个小孔是共线的(如【10】中所记录的,这个案例在航空摄影中有着实际和重要的应用)。我们在 x_1 和 x_2 上放置两个小孔 c_1, c_2 , 第三个小孔 c_3 则在 $x_1 + x_2$ 上。我们可以这样做,因为这相当于选择 c_1 和 c_2 作为基线的基本要点加入三个小孔, c_3 作为单位点。从 Eq. (4):

$$y_{41}y_{32} = y_{31}y_{42}, y_{41}y_{33} = y_{31}y_{43}, y_{42}y_{33} = y_{32}y_{43}, \quad (10)$$

分别写下 $T_0 = 0$ 和 $T_3 = 0$ 时

$$\begin{aligned} y_{31}y_{32}(y_{23} - y_{13}) + y_{33}(y_{31}y_{12} - y_{21}y_{32}) &= 0, \\ y_{41}y_{42}(y_{23} - y_{13}) + y_{43}(y_{41}y_{12} - y_{21}y_{42}) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

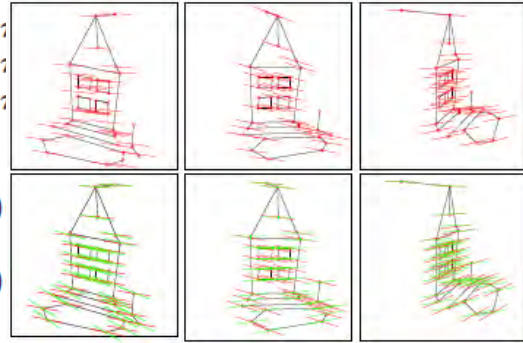
在我们选择的坐标系中其他两个项 T_1 和 T_2 为零。

我们可以依据矩阵 $\Pi_j (j = 1, 2, 3)$ 的行改写之前的 Eqs. (10) 和 (11)。给定特定的 Eq. (11) 的 $y_{23} - y_{13}$, 介绍向量 $\omega_3 = \pi_{23} - \pi_{13}$ 很方便,我们得到了三目镜几何学的下一个特征表述。

命题 6. 给定三个针孔摄像机并假定点对应 $u_1, u_2,$ 和 $u_3,$ 三条对应线收敛的充分必要条件是

$$\begin{aligned} u_1^T F_{12} u_2 &= 0 & F_{12} &= \pi_{41} \pi_{32}^T - \pi_{31} \pi_{42}^T \\ u_1^T F_{13} u_3 &= 0 & \text{where } F_{13} &= \pi_{41} \pi_{33}^T - \pi_{31} \pi_{43}^T \\ u_2^T F_{23} u_3 &= 0 & F_{23} &= \pi_{42} \pi_{33}^T - \pi_{32} \pi_{43}^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= (\pi_{31} \cdot u_1)(\pi_{32} \cdot u_2)(\omega_3 \cdot u_3) + (\pi_{33} \cdot u_3)[(\pi_{31} \cdot u_1)(\pi_{12} \cdot u_2) - (\pi_{21} \cdot u_1)(\pi_{12} \cdot u_2)] \\ 0 &= (\pi_{41} \cdot u_1)(\pi_{42} \cdot u_2)(\omega_3 \cdot u_3) + (\pi_{43} \cdot u_3)[(\pi_{41} \cdot u_1)(\pi_{12} \cdot u_2) - (\pi_{21} \cdot u_1)(\pi_{12} \cdot u_2)] \end{aligned}$$



向量

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (\pi_{21}; \pi_{31}; \pi_{41}), \quad \pi_2 = (\pi_{12}; \pi_{32}; \pi_{42}) \text{ 和 } \pi_3 = (\omega_3; \pi_{33}; \pi_{43}) \text{ 满足 8 个齐次收敛} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_{21}^1 &= 0, \quad \pi_{31}^2 = 0, \quad \pi_{12}^1 = 0, \quad \pi_{42}^2 = 0 \\ \pi_{31}^3 &= \pi_{21}^3, \quad \pi_{32}^3 = \pi_{42}^3, \quad \omega_3^1 = \omega_3^2 = \omega_3^3 \end{aligned}$$

这样分别通过三组 6, 6, 7 个独立系数定义, 每个都唯一确定一个分离比例, 总共 16 个独立参数。这是一个最小的 16 自由度的参数化。

论据。 Eqs. (10) 和 (11) 立即替代得到了方程 (12) 和 (13)。他们一起提供 24 自由度的三焦点的几何参数化的三个向量

$\pi_j (j = 1, 2, 3)$, 每个都通过 8 个 \mathbb{R}^9 中的独立参数确定比例。把三个针孔摄像机安装在 x_1, x_2 , 和 $x_1 + x_2$ 中固定 15 个之中的 7 自由度的不确定的射影结构上。与命题 5 的论据相似, 剩下的 8 个自由度可以用来利用在向量 π_j 上的 Eq. (14) 的约束。同时, Eqs. (12), (13) 和 (14) 通过三个向量 π_1, π_2, π_3 给我们提供了一个三目镜几何学的最小的 16 自由度的参数化, 现在每个仅靠 5, 5 和 6 个独立参数唯一确定 \mathbb{R}^9 的比例。

Figure 6. (Top) Example trinocular lines recovered from correspondences in three images; (Bottom) Estimated epipolar lines (two sets per image). Note that the two families of epipolar lines associated with an image typically contain (near) degenerate pairs that can be disambiguated using trilinearities.

3. 4. 预执行

命题 5 可以被用来估算向量 π_j 与三个非共线的针孔摄像机在三个图像中的只有 6 个对应项: 这些向量的初始值在相应的投影矩阵中很容易获得, 估算用一个仿真投影模型【2, 18】匹配点的 6 个三目镜。向量 π_j 是通过最小化均方所有数据点和对应的三焦线, 极线之间的距离得到精确化的。我们有构建了这个方法的一个初步实现, 图 6 显示了三张图片中的一个示例和 38 对应项, 和对应的极线和三焦线。表 1 显示了数据点和这些行之间的平均距离。极线的平均距离大约是一个像素, 且比得上从同数据的成对图像中通过传统估算技术获得的基本矩阵。【4, Ch. 8】。从另一方面来讲, 我们的方法是构建健壮简并的位于三目镜平面附近的点。进一步的实验和其他三目镜几何学的最小参数化的比较是理应需要我们的方法进行验证。

4. 讨论

Init.	E12	E13	E23	E21	E31	E32	T1	T2	T3
Aff.	1.0	1.0	0.9	1.0	0.9	0.9	6.3	0.9	0.8
Proj.	2.0	1.6	1.3	1.9	1.5	1.2	7.7	1.7	1.1

我们同事有几何学和分析学的多视角几何的三线性点的特征表述。虽然我们展示的本质主要还是理论的（真正三焦点的限制是什么？），我们的分析导致了共线和非共线的针孔三目镜几何学的一个新的最小参数化，而且我们已展示了一个非共线例子的预执行。一个实现及其扩展共线情况的成熟的实验评估正是我们的下个议程。

当然你可以疑惑四条线相交于确定的一点的事实是否也被几何地分析地描述了。事实上，存在一个张量表达对应的四观点的约束 [20]，冗余和极线三焦点约束已被证明。回顾过去，几何学上很明显地四条线相交于一点的充分必要条件是它们之间任意两个三焦点可以：这接着立即这些三目镜有共同的两条线的事实，所以这两条线的交点也是四条线的交点。

换句话说，没有必要去写任何方程去考虑四条线共同替代一系列例子中三目镜不加的几何图片。在另一个方面，四条线的自然的代数约束是它们为线性相关，这等同于写下所有 6×4 矩阵的 4×4 部分包络他们的 **Plücker** 坐标向量为零。这产生了一系列约束相似的情况。然而，一个三级的线组的项不必要相交于一个单点：他们反而组成了一个 *regulus*，在图 3 展示的立体几何中的其中之一，这当然包括了线束。对他们自身来说，（已知的）既不充分也不必要去描述对应视线相交的事实。有趣的是，这一小步可能是未来的一大步。

鸣谢。这个工作支持部分 ERC 和 VideoWorld, the Institut Universitaire de France 和 ONR MURI N000141010934。

参考文献

[1] N. Canterakis. A minimal set of constraints for the trifocal

tensor. In ECCV, 2000. 2, 6, 7

[2] S. Carlsson. Duality of reconstruction and positioning in multiple views. In Proc. Workshop on Representation of Visual Scenes, 1995. 7, 8

[3] O. Faugeras and B. Mourrain. On the geometry and algebra of the point and line correspondences between n images. Technical Report 2665, INRIA, 1995. 1, 2, 5

[4] D.A. Forsyth and J. Ponce. Computer Vision: A Modern Approach. Prentice-Hall, 2003. Second edition. 7

[5] R. Hartley. Lines and points in three views and the trifocal tensor. IJCV, 22(2):125 - 140, 1997. 1

[6] R. Hartley and A. Zisserman. Multiple view geometry in computer vision. Cambridge University Press, 2000. 1

[7] A. Heyden and K. Astrom. Algebraic properties of multilinear constraints. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 20(13):1135 - 1162, 1997. 5

[8] H.C. Longuet-Higgins. A computer algorithm for reconstructing a scene from two projections. Nature, 293:133 - 135, 1981. 1, 2

[9] Q.-T. Luong and O.D. Faugeras. The fundamental matrix: theory, algorithms, and stability analysis. IJCV, 17(1):43 - 76, 1996. 1

[10] J.C. McGlone, editor. Manual of Photogrammetry. ASPRS, 2004. Fifth Edition. 6

[11] T. Papadopoulos and O. Faugeras. A new characterization of the trifocal tensor. In ECCV, 1998. 2,

6, 7

[12] J. Ponce, K. McHenry, T. Papadopoulos, M. Teillaud, and B. Triggs. The absolute quadratic complex and its application to camera self calibration. In CVPR, 2005. 1, 2, 5

[13] H. Pottmann and J. Wallner. Computational Line Geometry. Springer-Verlag, Berlin, 2001. 2

[14] C. Ressel. A minimal set of constraints and a minimal parameterization for the trifocal tensor. In ISPRS-Comm. III Symposium, Vol. XXXIV, Part 3A, 2002. 2, 7

[15] A. Shashua. Algebraic functions for recognition. PAMI, 17(8):779 - 789, 1995. 1, 2

[16] M.E. Spetsakis and Y. Aloimonos. Structure from motion using line correspondences. IJCV, 4(3):171 - 183, 1990. 1, 2

[17] M.M. Thompson, R.C. Eller, W.A. Radlinski, and J.L. Speert, editors. Manual of Photogrammetry. ASPRS, 1966. Third Edition. 2

[18] C. Tomasi and T. Kanade. Shape and motion from image streams under orthography: a factorization method. IJCV, 9(2):137 - 154, 1992. 7, 8

[19] P.H.S. Torr and A. Zisserman. Robust parameterization and computation of the trifocal tensor. IVC, 15, 1997. 2, 6, 7

[20] B. Triggs. Matching constraints and the joint image. In ICCV, 1995. 1, 8

[21] O. Veblen and J. Young. Projective Geometry. The Atheneum Press, 1910. 2, 3

[22] J. Weng, T.S. Huang, and N. Ahuja. Motion and structure from line correspondences: closed-form solution, uniqueness, and optimization. PAMI, 14(3):318 - 336, 1992. 1, 2