

指导教师： 杨涛

提交时间： 2015-03-29

The task of
Digital Image Processing

数字图像处理

School of Computer Science

No: 1

姓名： 王旭

学号： 2012302579

班号： 10011206



相机的什么运动揭示了未知 BRDF 的物体的形状2

 摘要.....2

 1. 引言.....2

 2. 相关工作.....4

 3. 一般 BRDF 的微分立体5

 3.1. 微分立体关系假说的推导和设置5

 3.2. 理解微分立体关系.....7

 4. 正射投影.....8

 4.1. 秩亏及深度模糊.....8

 4.2. 对某些材料类型的 BRDF 不变性 11

 4.2.1 BRDF 依赖于视角 11

 4.2.2 依赖于半角的 BRDF 12

 4.2.3 $\{s,v\}$ -平面对任意角的依赖 13

 4.3. 曲面估计结果.....14

 5. 透视投影.....16

 5.1. 微分立体中的深度.....16

 5.2. 对特定材料的额外约束.....17

 5.3. 形状恢复.....18

 6. 从运动理论对物体进行透视.....19

 参考文献.....21



相机的什么运动揭示了未知 BRDF 的物体的形状

Manmohan Chandraker

NEC(日本电气股份有限公司)美国实验室, 库比蒂诺, C

摘要

心理物理学研究表明, 物体的运动线索能够显示其形状甚至未知的反射系数。最近的计算机视觉工作中, 研究人员都曾考虑到用光源或物体运动来实现对一个 BRDF(双向反射分布函数 Bidirectional Reflectance Distribution Function) 未知的物体的形状恢复。本文对于未知各向同性的 BRDF, 讨论摄像机(小的或不同的)的运动来确定物体形状的剩余问题。我们的理论以未知各向同性的 BRDF, 得出了一个涉及摄像机运动至一个曲面深度的差分立体关系, 并推广了传统的 Lambertian 假设。在正投影中, 我们展示的形状可能一般不会受到限制, 但两项由普通材料展现出的议案还是能够为一些限制的(还不得而知)BRDF 产生不变量。在立体的情况下, 我们证明了三个立体差分足够为未知各向同性 BRDF 和方向未知的照明产生曲面深度, 然而额外的限制是由 BRDF 和照明的获取限定造成的。我们的理论强加的限制是形状恢复问题的固有性和有关创建方法的选择自主性。我们为重建方法利用我们的理论的潜在性这一实验做出概述。我们从由光线, 物体或照相机的运动产生的形状的有关理论说明了这一趋势, 并叙述了成像复杂性对于重建的困难。

1. 引言

图像的形成是由形状、光照和照相机相互作用, 并受材料的反射率支配的结果。物体的运动, 光源或相机是从图像中恢复物体形状的重要的线索。在运动物体的光流[7, 9]、光源运动的光度测定立体[19]和照相机运动的多视角体视[15]方面, 这些线索每个都在计算机视觉中被广泛研究。决定材料特性的双向反射分

布函数 (BRDF) 是复杂的, 而且往往不知其性质, 因此诸如亮度的稳定性和 Lambertian 反射率之类的假设的简化通常被使用。

然而, 心理物理学研究已经证实, 复杂的反射率不妨碍对形状的感觉 [16]。相应的, 最近计算机视觉的作品显示, 光源或物体的不同移动都能告知物体的形状甚至未知的 BRDF。本文用相机的不同移动来解决显示未知 BRDF 的物体的形状恢复的特征的剩余问题。

我们通过提出一个不同的微分立体关系来开始第 3 章节, 这个关系涉及摄像机的运动深度, 从而解释一般材料用一个各向同性 BRDF 形式的行为。传统的 Lambertian 体视的弥散的照片一致性都遵循一个特殊的情况。令人惊讶的是, 研究一系列动作能消除 BRDF 对微分立体立体的依赖, 而这能够被显示出来。

微分立体立体的数学基础表面上与对象运动的差分连贯性相似[4]。然而, 虽然在[4]中我们认为 BRDF 是黑盒函数, 但分析明确地考虑了各向同性 BRDF 的正交依赖性来导出新的认识。这么做一个特别的好处就是, 原本给形状恢复带来更多困难的相机运动情况, 能够被显示出其模糊的存在。

因此, 第四章通过对一般各向同性 BRDF 的曲面的形状约束可能不是用照相机运动的线索导出的, 对正投影得出了否定的结果。但是, 通过塑料、金属、一些涂料和织品等普通材料的表现, 我们得出几个受限的各向同性 BRDF 正交不变性的存在。这一不变性显示出线性偏微分方程 (PDE) 的特点, 其指出拓扑等级达到了重建可能表现出来的等级。

第 5 章节显示, 未知各向同性 BRDF 的物体, 在未知的定向光照下, 可能通过三个或三个以上的相机运动运用微分立体立体关系即可获得其曲面深度。此外, 我们表明, 曲面梯度的额外线性约束对于上述 BRDF 受限的家族是可以获得的。因为深度信息不是通过假设弥漫的照片一致性来获得的, 而一个虚的建立在材料类型上的假设甚至能产生更丰富的曲面信息, 所以这些结果大大地推广了 Lambertian 体视。表 1 概括了本文的主要理论成果。

最后, 第 6 章节探讨有关物体、光源或照相机运动的差分理论间的关系。我们讨论了他们使形状得以恢复的共同特点, 以及涉及从曲面重建的困难到图形建立复杂性的共同趋势。表 2 概括了那些从运动中得来的形状透视。

2. 相关工作

由于差分运动带来的涉及形状的强度变化在计算机视觉中有着显著的历史，其可以追溯到光流的研究[7, 9]。在早起作品中已经意识到了 Lambertian 假设的局限性[11, 18]。

照相机	光照	BRDF	#运动	曲面约束	形状恢复	理论
Persp	未知	Lambertian	1	线性等式	深度	体视
Orth	未知	一般, 未知	-	Ambiguous 重建	-	命题.3
Orth	未知	视角, 未知	2	Homog 线性偏微分方程	水平曲线	命题.1, 6
Orth	未知	半角, 未知	2	Homog 线性偏微分方程	Char.曲线	命题.4,7
Persp	未知	一般, 未知	3	线性等式	深度	命题.8
Persp	未知	视角, 未知	3	线性等式+ Homog 线性偏微分方程	深度+梯度	命题.5,2
Persp	已知	半角, 未知	3	线性等式+ Homog 线性偏微分方程	深度+梯度	命题.9

表 1 概括了本文的主要研究成果。需要注意的是 K 相机运动产生了 K+1 图像。用正交的依赖性和函数的功能形式来描述 BRDF。更多受约束的 BRDF 或光照能产生更丰富的形状信息。此外，请参考第 6 章节的讨论。

一些体视方法已经被开发出来用于处理非 Lambertian 的材料。Zickler 等人利用 Helmholtz 互易原理处理任意 BRDF 物体的重建[20]。几特性状已知的参考形状以及各种材料模型被用于基于实例的方法中[17]。Savarese 等人研究镜面的立体重建[14]。相反，本文不注重重建方法，而是探讨了从相机运动得到的图像序列如何显示未知各向同性 BRDF 物体的形状。

光源和物体的运动也被用来了解未知 BRDF 物体的形状。基于小光源运动的测光体视在[5]中呈现，而[6, 12]中考虑了光学溢流的广泛概念。Sato 等人使用在变化光源下各标准的变化和辐射轮廓之间的一个等距关系，去处理反射比未知物体的形状恢复[13]。

Chandrakeret 等人的成果与本文密切相关，他们运用源[2]或物体[4]的不同运动，得到未知 BRDF 物体重建所能表现的拓扑等级。本文使用第三个线索即相机运动，派生了形状回复的限制。整篇文章都在探讨框架之间的共同点和差异，且在第 6 章节进行了概括。

3. 一般 BRDF 的微分立体

在本节中，我们陈述我们的假设，推导出对于未知各向同性 BRDF 的相机运动和曲面深度之间的关系。我们还提供了一些该关系上的直觉，这将被用于后续的形状恢复结果。为了便于介绍，我们偶尔会向读者标明扩展版本[1]中的细节信息。

3.1. 微分立体关系假说的推导和设置

我们假设物体和光照是静止的，而相机是移动的。对于刚体运动，我们的分析认为其等效于一个固定的相机，而物体和光源正在进行相反的运动。光照假定是定向且遥远的。BRDF 对象假定是均匀和各项同性的，且具有未知功能的形式。我们作出一个技术性假设，对于整个对象来说，相机的方向是恒定不变的¹。全局照明效果被认为可以忽略不计。

设相机的焦距为 f 。相机模型可透视到 f 为无穷大，表示方法为 $f \rightarrow \infty$ 。图像平面上的主点被定义为三维坐标系的源点，且相机中心处于 $(0, 0, -f)^T$ 。表示 $\beta = f^{-1}$ ，三维点 $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ 在 $\mathbf{u} = (u, v)^T$ 上成像，且

$$(1 + \beta z)u = x, (1 + \beta z)v = y \quad (1)$$

运动场 让相机经刚体转动 \tilde{R} 和翻转 $\tilde{\tau}$ ，我们等效假定对象和光源进行了旋转 $R = \tilde{R}^{-1}$ 和翻转 $\tau = R^{-1} \tilde{\tau}$ ，而相机是固定的。对于不同的运动，我们近似认为 $R \approx I + [\boldsymbol{\omega}]_{\times}$ ， $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ 。

运动场 $\boldsymbol{\mu} = (\dot{u}, \dot{v})^T$ 是微分获得的图像进行差动得到的。我们建议读者参考之前的作品从而了解其的推导过程，比如[11, 4]，在这里我们仅仅将运动场描述为一个与[2]相似的形式。

$$\text{透视:} \quad \boldsymbol{\mu} = \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2 + \omega_2 z}{1 + \beta z}, \alpha_3 + \frac{\alpha_4 - \omega_1 z}{1 + \beta z} \right)^T \quad (2)$$

¹准确来说这个假设是建立在正交相机之上的，但是在不同观看方向下，仅一个透视投影近的似可能会随物体的尺寸不同而变化。相对于物体的尺寸，在相机不是太靠近物体这一特殊情况下，这个近似是合理的。

正交:
$$\mu = (\alpha_5 + \omega_2 z, \alpha_6 - \omega_1 z)^T \quad (3)$$

其中, $\alpha_i, i=1, \dots, 6$ 是 ω, τ, u 和 β 的公知函数, ω, τ, u 和 β 代数形式示于 [1].

微分立体关系 设 s 是光源方向, $v = (0, 0, -1)^T$ 为照相机的方向, 对于一个表面上的三维点 $x = (x, y, z(x, y))^T$, 其单位标准是

$$n = (n_1, n_2, n_3)^T = (z_x^2, z_y^2, 1)^{-\frac{1}{2}} (z_x, z_y, -1)^T \quad (4)$$

其中 $\nabla z = (z_x, z_y)^T$ 是曲面梯度. 对于均匀各向同性 BRDF ρ , 在遥远的光源照射下, 一个三维点 x 的像素 U 的图像亮度被假定为

$$I(u, t) = \sigma(x) \rho(x, n, s, v) \quad (5)$$

其中, σ 是反射率, ρ 中包含余弦衰减. 这是一个合理的成像模型, 其包含传统模型如 Lambertian, 而且允许由空间不同的反射率调制的一般 BRDF. 我们对 ρ 的函数形式做任何假设, 除了平滑度.

对(5)两边做全导数, 我们得到

$$I_u \dot{u} + I_v \dot{v} + I_t = \sigma \frac{d}{dt} \rho(x, n, s, v) + \rho \frac{d\sigma}{dt} \quad (6)$$

因为 σ 本质上是定义在面上的坐标, 所以其全导数就消去了. 我们考虑的刚体运动, $\dot{n} = \omega \times n$ 且 $\dot{s} = \omega \times s$, 而相机方向保持不变. 用链式法则微分, 并注意到 $\mu = (\dot{u}, \dot{v})^T$ 为运动场, 我们得到

$$(\nabla_u I)^T \mu + I_t = \sigma [(\nabla_x \rho)^T v + (\nabla_n \rho)^T (\omega \times n) + (\nabla_s \rho)^T (\omega \times s)] \quad (7)$$

其中, $v = \dot{x}$ 是线速度, 上面的讨论在(7)中仅仅从直觉上给出了微分关系, 我们建议读者参看[1]中的严格推导过程.

相对于我们设定的遥远光照和均匀反射, 我们可以假定 $\nabla_x \rho$ 是对实验结果的影响是极为微小的. 我们将(5)带入(7)中进一步划分(7)的两边, 得到:

$$(\nabla_u E)^T \mu + E_t = (n \times \nabla_t \log \rho + s \times \nabla_s \log \rho)^T \omega \quad (8)$$

其中, 对 $a \in R^3$, 我们使用了符号 $E = \log I$ 和恒等式 $(\nabla_a \rho)^T (\omega \times a) = (a \times \nabla_n \rho)^T \omega$,

$\nabla_a \log \rho = \rho^{-1} \nabla_a \rho$ 。我们称(8)为微分立体关系。

3.2. 理解微分立体关系

Lambertian 立体概括 微分立体关系(8)给我们的最初的直觉可能是其推广了传统 Lambertian 立体。对于经过已知运动产生的两幅相关的图像 I^1 和 I^2 ，Lambertian 立体寻求最能满足亮度恒常性的深度 z ： $I^1(u) = I^2(u + \mu(z))$ 。将 Lambertian 反射公式 $\rho(n, s, v) = n^T s$ 带入(8)中，我们得到

$$(\nabla_u E)^T \mu + E_t = (n \times (n^T s)^{-1} s + s \times (n^T s)^{-1} n)^T \omega = 0^T \omega = 0 \quad (9)$$

这正好证明了亮度的恒常性(图像亮度的全导数为 0)。因此，传统立体强加的分散的光一致性是我们理论的一个特例。

物体运动关系 [4]中推到了物体运动的微分流量关系。BRDF 作为对光源照射所产生反应的导数，微分立体关系(8)对其有着额外的依赖关系。这是显而易见的，因为在相机运动的情况下，物体和光照相对于其都在移动，然而在物体运动的情况下，只有物体在移动。因此，直觉上照相机的运动产生了更困难的重建问题。事实上，正如我们即将介绍的，光照对(8)的依赖性产生了有些惊人的额外奇异。

相机运动的歧义 现在我们决定性地抛开[4]中的分析，那么可以得到一些额外的见解。也就是说，我们不把各向同性 BRDF 彻底地当做黑箱函数，而是明确地考虑它们在正常、光源照射和相机方向不同情况下对角度的依赖性的物理性质。我们定义：

$$\pi = n \times \nabla_n \log \rho + n \times \nabla_s \log \rho \quad (10)$$

它允许我们将微分立体关系(8)重写为：

$$(\nabla_u E)^T \mu + E_t = \omega^T \pi \quad (11)$$

实体 π 是我们理论的核心，因为它捕获了微分立体对 BRDF 的依赖。其现实意义是，任何寻求材料行为不变性的形状恢复方法，要么必须模拟它，要么必须消除它。而我们采取后一种方法。

以下的定义导致了用各向同性 BRDF 恢复形状的固有观测：

命题 1. 相机主平面上的二维向量捕获了微分立体的 BRDF 依赖性。

证明: 因为一个各向同性 BRDF 依赖于正常、相机和光照方向之间的三个夹角, 我么可以写出:

$$\tilde{\rho}(\mathbf{n}^T \mathbf{s}, s^T \mathbf{v}, \mathbf{n}^T \mathbf{v}) = \log \rho(\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{v}) \quad (12)$$

令 $\theta = \mathbf{n}^T \mathbf{s}$, $\phi = s^T \mathbf{v}$, $\psi = \mathbf{n}^T \mathbf{v}$, 然后应用链式法则微分, 我们可以重写(10)为:

$$\begin{aligned} \pi &= \mathbf{n} \times \nabla_{\mathbf{n}} \log \tilde{\rho} + \mathbf{n} \times \nabla_{\mathbf{s}} \log \tilde{\rho} \\ &= \tilde{\rho}_{\theta}(\mathbf{n} \times \mathbf{s}) + \tilde{\rho}_{\psi}(\mathbf{n} \times \mathbf{v}) + \tilde{\rho}_{\phi}(\mathbf{s} \times \mathbf{n}) + \tilde{\rho}_{\phi}(\mathbf{s} \times \mathbf{v}) \\ &= \tilde{\rho}_{\psi}(\mathbf{n} \times \mathbf{v}) + \tilde{\rho}_{\phi}(\mathbf{s} \times \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (13)$$

从(13)中 π 的形式可以明显看出, $\pi^T \mathbf{v} = 0$ 。对我们选取的坐标系, 我们有 $\mathbf{v} = (0, 0, -1)^T$ 。因此

$$\pi_3 = 0 \quad (14)$$

由此可见, 依赖于 BRDF 的实体 $\pi = (\pi_1, \pi_2, 0)^T$ 位于相机的主平面上。

这是一个重要的结论, 即限制程度到可能从微分立体中恢复过来的形状。下面的小节探索这些限制的确切性质。

4. 正射投影

估算运动场 μ , 相当于确定密度对应, 从而确定物体的形状。在本节中, 我们使用微分动作的序列, 考虑用正射投影下未知 BRDF 恢复形状。我们的重点将是继续提供直觉知识, 而读者可以参考[1]中的细节。

4.1. 秩亏及深度模糊

由于(11)是一个多个未知数 $\{z, \pi\}$ 的线性关系, 只有一个相机的微分运动来提取深度显然是不足的。因此, 我们考虑一个微分动作的序列。我们开始通过观察发现, 在正交情况下, 秩亏也与相机运动存在下物体运动情况相似。

在正交情况下, (3)中给出了运动场 μ 。注意到 μ_1 和 μ_2 在 z 中时线性的, 我们发现微分立体关系(11)可化简为:

$$pz + q = \omega^T \pi \quad (15)$$

其中，运用(3)， p 和 q 是下式中给出的已知实体：

$$p = \omega_2 E_u - \omega_1 E_v \quad (16)$$

$$q = \alpha_5 E_u + \alpha_6 E_v + E_t \quad (17)$$

考虑 $m > 0$ ， $\{\omega^i, t^i\}$ ， $i=1, \dots, m$ 给出了微分运动相机的基础位置。令 $E^0 = \log I^0$ 为对数的基本图，其中 E^i 是每个运动 $\{\omega^i, t^i\}$ 的对数图。注意到图像的空间梯度是独立于运动的，且是 u 对应的在 E^0 处的导数。我们简记它为 $\nabla_u E = (E_u, E_v)^T$ 。时间的导数， E_t ， p 和 q 依赖于运动。

为了恢复未知的深度 z ，一个最初的方法是可能将 $m \geq 3$ 时(11)关系的形式当做一个线性系统：

$$\tilde{A} \begin{bmatrix} z \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = q, \text{ 且} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} -p^1 & \omega_1^1 & \omega_2^1 \\ \vdots & & \vdots \\ -p^m & \omega_1^m & \omega_2^m \end{bmatrix}, \quad (18)$$

其中 $q = (q^1, \dots, q^m)^T$ 。因为 $\pi_3 = 0$ 不是一个未知量，因此我们注意到命题 1 允许我们摆脱对 ω_3 的任何依赖。但是注意从(16)中产生的形式 $p^i = \omega_2^i E_u - \omega_1^i E_v$ ，它使 \tilde{A} 秩亏。因此，我们得出：

命题 2. 在正射投影下，未知 BRDF 下的曲面深度的明确恢复，可能不是单独使用相机运动作为线索。

尽管不能直接从正交投影下利用微分立体恢复深度，但下一步自然是考虑深度上任何限制的可能性。然而，命题 1 的结论使其在相机运动的情况变得极富挑战性。看到这里，我们注意到秩亏矩阵 \tilde{A} 的零向量为 $(1, -E_v, E_u)$ 。有 \tilde{A}^+ 表示 \tilde{A} 的广义逆，对 $k \neq 0$ ，我们对(18)有一个参数化的解决方案：

$$\begin{bmatrix} z \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = Y + k \begin{bmatrix} 1 \\ -E_v \\ E_u \end{bmatrix} \quad (19)$$

其中 $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)^T = \tilde{A}^+ q$ 。从上述系统中的第一个方程我们得到 $k = z - Y_1$ 。因此，我们得到下面 z 和 π 的两个关系式：

$$\pi_1 = (Y_2 + E_v Y_1) - E_v z \quad (20)$$

$$\pi_2 = (Y_3 - E_u Y_1) + E_u z \quad (21)$$

现在， π_1 和 π_2 之间的任意一个关系式都给出了对深度 z 的一个限制。但是从命题 1 中可以看出， π 是主平面中的一个任意向量。也就是说，从(13)， π_1 和 π_2 依赖于两个未知 BRDF 的倒数 $\tilde{\rho}_\psi$ 和 $\tilde{\rho}_\phi$ 。由此可见，没有对 $\tilde{\rho}_\psi$ 和 $\tilde{\rho}_\phi$ 施加任何外部约束，就没有曲面深度限制的产生。因此，我明定义：

命题 3. 在正射投影下，对于未知各向同性的 BRDF，曲面深度的一个明确限制可能不是仅用相机运动作为线索得到的。

上面是一个例子比较了物体或相机运动对形状恢复的限制。对于物体运动，相机和物体的运动必须被认为是相对的。因此，[4]中的定义式 $\pi = n \times \nabla_n \log \rho$ 只依赖 BRDF 关于去曲面法线的导数。对于相机运动，物体和光照都相对照相机移动。如果没有对 BRDF 和光照的进一步限制，(10)中 π 对 BRDF 关于光照的导数的额外依赖性使其变得不确定。

尽管命题 3 的结果是消极，但其发展为我们提供了有价值的见解。用 m 阶微分运算构造一个 $m \times 3$ 秩亏矩阵 \tilde{A} ，对于任意 $m \geq 2$ ，其确定了 $Y = \tilde{A}^+ q$ 。从(14)、(15)和(21)可以看出，它遵循：

推论 1. 在正交投影下，相机的两个差动足以限制 π 到 z 的线性关系。

这一事实以及一些 BRDF 上的限制，都将被用于派生出深度上的 BRDF 不变限制。

4.2. 对某些材料类型的 BRDF 不变性

命题 3 的结果直接显示了约束 z 的可能：设想一个依赖于 ϕ 和 ψ 的 BRDF 在引入 π 的限制后在某种程度上被约束了。注意 BRDF 的函数形式， $\rho(\square)$ ，仍然是未知的。

4.2.1 BRDF 依赖于视角

一些反射率依赖于包含在源和视角方向常态的角中。这些 BRDF 能解释纤维等材料图像边缘附近变暗。另一个著名的例子是用于月球反射的 Minnaert BRDF[10]。在这种情况下，我们可以定义

$$\bar{\rho}(n^T s, n^T v) = \log \rho(n, s, v) \quad (22)$$

仍然用 $\theta = n^T s$ ， $\psi = n^T v$ ，我们从(10)得到：

$$\begin{aligned} \pi &= n \times \nabla_n \bar{\rho} + n \times \nabla_s \bar{\rho} \\ &= n \times (\bar{\rho}_\theta s + \bar{\rho}_\psi v) + s \times \bar{\rho}_\theta n = \bar{\rho}_\psi n \times v \end{aligned} \quad (23)$$

注意到 $n \times v = (-n_2, n_1, 0)^T$ ，可以用(20)和(21)消去不依赖于 BRDF 的项 $\bar{\rho}_\psi$ ，并得到一个深度和法向量之间的关系：

$$\frac{\pi_1}{\pi_2} = -\frac{n_2}{n_1} = \frac{(Y_2 + E_v Y_1) - E_v z}{(Y_3 - E_u Y_1) + E_u z} \quad (24)$$

用(4)将法向量和梯度联系在一起，此式化简为：

$$[(Y_2 + E_v Y_1) - E_v z]z_x + [(Y_3 - E_u Y_1) + E_u z]z_y = 0 \quad (25)$$

这是一个与光照和 BRDF 都无关的对曲面深度和梯度的限制。我们注意到 $m \geq 2$ 时照相机的差动足以去决定(19)中的 Y 和产生(25)的限制。因此我们规定：

备注 1. 正交投影下，对于一个函数形式未知且依赖于光线和视线方向的 BRDF，照相机的两个差分运动足以不依赖 BRDF 和光照的产生一个对曲面深度的限制因素。

4.2.2 依赖于半角的 BRDF

对于很多常见的材料比如金属或塑料，假设反射系数依赖于曲面法线、源和视角方向之间的半角两者之间的夹角是合理的。对于这种材料类型的曲面，我们能显示一个对曲面深度产生 BRDF 不变约束的微分立体关系的序列。对于这种情况，我们假设光源方向是已知的。

命题 4. 在正投影下，函数形式依赖于已知的光照和半角方向，对于未知函数形式的 BRDF，两个微分运动镜头足以产生对曲面深度的 BRDF 不变约束。

证明. 对于一个依赖于半角 h 的 BRDF，我们定义 $\log \rho(n, s, v) = \bar{\rho}(n^T s, n^T v)$ ，其中

$$h = \frac{s + v}{\|s + v\|} \quad (26)$$

(10)中定义的 π 现在能被重写为

$$\pi = n \times \nabla_n \bar{\rho} + s \times \nabla_s \bar{\rho} \quad (27)$$

我们依旧用 $\theta = n^T s$ ， $\phi = s^T v$ ，并新定义 $\eta = n^T h$ 。然后，用(26)中 h 的定义，经过一些代数化简，我们得到：

$$\pi = \bar{\rho}_\eta \left[\frac{n \times v}{\|s + v\|} - \frac{(n^T h) s \times v}{\|s + v\|^2} \right] \quad (28)$$

关于 n 和 s 的 π 的对称性意味着它不依赖于 ρ_0 。重新考虑(14)中的 $\pi_3 = 0$ 。经过一些代数运算，并用(4)将 n 于梯度联系起来，我们从(28)得到：

$$\frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{a^T n}{b^T n} = \frac{a_1 z_x + a_2 z_y - a_3}{b_1 z_x + b_2 z_y - b_3} \quad (29)$$

其中， $a_1 = s_2 h_1$ ， $a_2 = s_2 h_2 - \sqrt{2(1 + \phi)}$ ， $a_3 = s_2 h_3$ 且 $b_1 = \sqrt{2(1 + \phi)} - s_1 h_1$ ， $b_2 = -s_1 h_2$ ， $b_3 = -s_1 h_3$ 。因此，我们已经得到一个不依赖于 $\bar{\rho}_\eta$ 的关于 π 的关系式。

最后，对于 $m \geq 2$ 微分的相机运动，我们从推论 1 可以得到 π_1 和 π_2 在 z 中是

线性的。将(20)和(21)中的表达式式带入(29)中，我们得到

$$(\lambda_1 + \lambda_2 z)z_x + (\lambda_3 + \lambda_4)z_y + \lambda_5 = 0 \quad (30)$$

其中， $\lambda_i, i=1, \dots, 5$ ，都是已知的实体。[1]中提供完整的 λ_i 表达式。在这里，只要注意 λ_i 是不依赖于 $\bar{\rho}$ 的，因此，(30)是对曲面深度的 BRDF 不变约束。

直觉上，和命题 3 的模糊性存在，因为如果 π_1 和 π_2 依赖于两个孤立的未知的 ρ_ϕ 和 ρ_ψ ，就不能限制 π_1 和 π_2 。考虑一个适当的 BRDF，例如半角 BRDF，它允许以一个单个未知的 ρ_η 的形式表示 π 。线性微分法消除了 ρ_η 产生 BRDF 不变对 π 的约束，因此，命题 4 能得到一个纯粹以深度和梯度表示的不变量。

注意命题 1 是相机运动下各向同性 BRDF 的一个基本属性。所以，在半角 BRDF 受限的情况下验证它结果甚至依然正确，也就是说，(28)中甚至依然为了 π 定义了 $\pi^T v = -\pi_3 = 0$ 。

4.2.3 {s,v}-平面对任意角的依赖

近期针对测量的 BRDF 的实证分析表明，反射函数通常依赖于曲面法线与光源做出的夹角，以及光源与相机方向确定的平面上的另一个方向[3]。在这种情况下，对一些 $\kappa \in \mathfrak{R}$ ，我们可以写出：

$$\log \rho(n, s, v) = \bar{\rho}(n^T s, n^T v), \quad \text{且 } y = \frac{s + \kappa v}{\|s + \kappa v\|} \quad (31)$$

注意到 4.2.2 中考虑的对塑料和金属等材料适用的半角 BRDF 是 $\kappa = 1$ 时的一个特例。在 4.2.1 节中考虑的 BRDF 也可以被认为是 $\kappa \rightarrow 1$ 时的极限情况。在[3]中给出了有限值 $\kappa \neq 1$ 情况下涂料、纤维等材料表现出来的 BRDF 的实例。现在，我们可以这样定义：

命题 5. 正交投影下，对于一个未知函数形式的，取决于光源和源视图平面上的一个任意方向的一个 BRDF，两个微分运动镜头足以产生对曲面深度的一个 BRDF 不变约束。

证明. 证明直接概括了命题 4 的发展。读者可以参考[1]中的完整细节信息。在这里我们只给出我们得到的公式：

$$\pi = \frac{\kappa \rho_{n^T y}}{1 + \kappa^2 + 2\kappa\phi} [(1 + \kappa^2 + 2\kappa\phi)^{\frac{1}{2}} n - (n^T y)s] \times v \quad (32)$$

因此，类似于(29)用 $\pi_3 = 0$ 和考虑 π_1 和 π_2 的比例，对 ρ 的依赖性可能被消除。然后，我们引入推论 1，并用 $m \geq 2$ 种微分运动，将 π_1 和 π_2 约束为 z 中的线性函数，产生了恒等式：

$$(\lambda'_1 + \lambda'_2 z)z_x + (\lambda'_3 + \lambda'_4 z)z_y + \lambda'_5 = 0 \quad (33)$$

其中， $\lambda'_i, i=1, \dots, 5$, 也是已知的实体。

请读者注意观察，约束式(33)对任意 BRDF 的函数形式是恒等的，但其依赖于 κ 。然而，注意到 κ 可从图像数据中估算出来，而不需要一个完整的 BRDF 估算，例如，用[3]中建议的方法。同时，我们还注意到命题 1 是各向同性 BRDF 的一种内在属性，且在(32)式中 $\pi_3 = 0$ 依然成立。

4.3. 曲面估计结果

回忆 4.1 中得出的结论，对于一般的未知各向同性 BRDF，我们可以既不估算其曲面深度，也不对其施加任何 BRDF 不变约束。然而，4.2 中派生出了对受限(但未知)的 BRDF 的深度和梯度的限制。在这里，我们描述了这些限制定义的 PDE(偏微分方程)，这直接给出了形状恢复可以到达的程度。

对一个有着(22)式的形式的 BRDF，我们能从(25)式中获得一个恒等式。我们注意到(25)式是一个均相一阶拟线性 PDE[8]。对一个曲面水平曲线 $z(x, y) = z_0$ ，从 PED 理论中得到的解是：

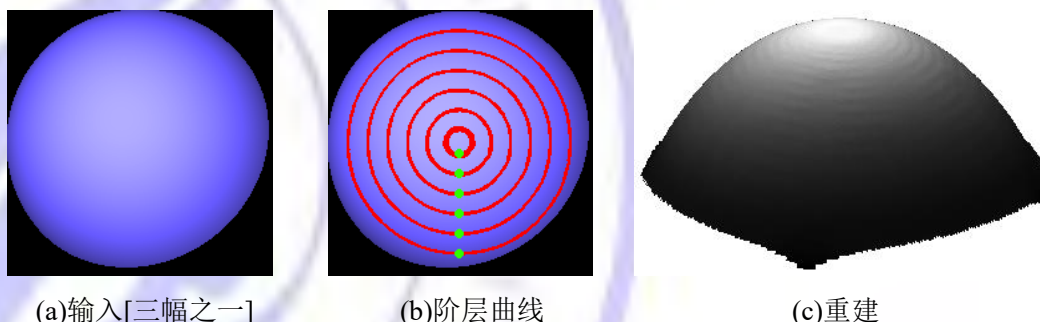


图 1. (a) 用未知光源和依赖于源与视角的任意非 Lambertian BRDF 产生的三个模拟正交图像之一(两个运动)。(b)用命题 6 估算的阶层曲线。(c)插值后重建的

曲面。

$$z = z_0, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(Y_3 - E_u Y_1) + E_u z_0}{(Y_2 + E_v Y_1) - E_v z_0} \quad (34)$$

也就是说，给定一个点的深度，ODE(常微分方程)(34)确定了在切线方向上的一个步长，从而追踪出通过该点的阶层曲线。我们建议读者参考[1]中的标准推导过程，在这里只说明其结果：

命题 6. 在正交投影下，相机两个或更多的微分运动加上依赖于光源和视角的 BRDF，能够产生曲面的深度阶层曲线。

对由(26)中给出的半角 BRDF，可以从中获得一个就像(30)的 BRDF 不变表面深度约束。我们注意到，它是一个不均匀的一阶拟线性偏微分方程(PDE)，也可从 PDE 理论[8]中得到它的解法。在这里，用(30)中定义的 λ_i ，我们还是只声明其结论，而读者可以从[1]中找到它的证明：

命题 7. 在正交投影下，对于一个半角 BRDF 的曲面，相机的两个或更多微分运动，对一些(可能是孤立的)点的深度，能产生表面曲线 $C(x(s), y(s), z(s))$ ，其定义如下：

$$\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\lambda_3 + \lambda_4 z} \frac{dy}{ds} = \frac{-1}{\lambda_5} \frac{dz}{ds} \quad (35)$$

最后，对于一个(31)式给出的依赖于源-视图平面中的一个任意角的 BRDF，不变式(33)一眼是一个不均匀拟线性 PDE。因此，作为命题 7.的直接推广，微分立体也能用 λ'_i 而不是 λ_i 产生这种情况下的特征曲线。

形状恢复 给出未知 BRDF 的曲面上的几个点的深度，上述命题就能够产生顺着特定特征曲线的深度。对于光滑的曲面，为了恢复其整个表面的深度，我们可以在曲线之间进行插值运算。对于一个依赖于源和视角(未知光照)的 BRDF，图 1 用合成数据显示了其表面恢复过程，同理图 2 显示了未知半角 BRDF(已知光源)的过程。假设已知绿点为深度以产生红色的特征曲线。我们注意到，在实践中重建方法可能使用跟踪的特征点作为种子。

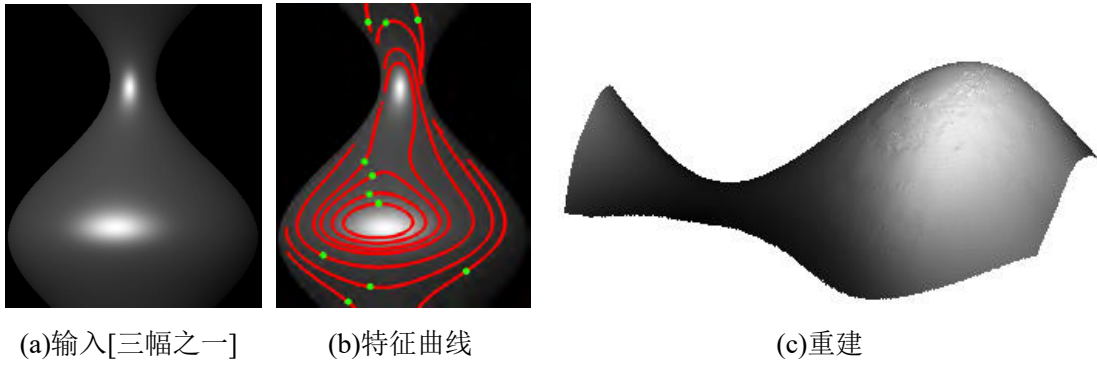


图 2. (a) 在正交投影下,用未知半角 BRDF 和已知光照,生成的三幅合成图(两种运动)之一。(b)用命题 7 产生的特征曲线。(c)插值后重建的表面。

5. 透视投影

在本节中,我们考虑透视投影下微分立体来恢复形状。特别的,我们表明,与正交投影的情况不同,即使 BRDF 和光照都是未知的,在透视情况下也可能明确地恢复物体情况。

5.1. 微分立体中的深度

在透视的情况下,(2)式给出了运动场 μ 。用(2)式替代微分立体关系式(8)中的 μ ,我们可以得到透视情况下的微分立体关系表达式:

$$p' \left(\frac{z}{1+\beta z} \right) + r' \left(\frac{1}{1+\beta z} \right) + q' = \omega^T \pi \quad (36)$$

其中,(10)式中给出了 π 的定义, $p' = E_u \omega_2 - E_v \omega_1$, $q' = \alpha_1 E_u + \alpha_3 E_v + E_t$, $r' = \alpha_2 E_u + \alpha_4 E_v$ 都是已知实体。与正交情况不同,透视投影下的微分立体关系在 $\{z, \pi\}$ 中不是线性的。

现在我们能够显示深度恢复:

命题 8. 在透视投影下,照相机的三个微分运动足以得到未知各向同性 BRDF 和未知光源的曲面的深度。

证明. 当 $m \geq 3$ 时,通过已知的微分运动 $\{\omega^i, \tau^i\}$ 将图像 E^1, \dots, E^m 与基本图像 E^0 联系起来。然后,我们从(36)式得到一系列微分立体关系。

$$(p^i + \beta q^i)z - ((1 + \beta z)\pi)^T \omega^i + (q^i + r^i) = 0 \quad (37)$$

其中 $i=1, \dots, m$. 令 $\tilde{C} = [c^1, \dots, c^m]^T$ 为一个 $m \times 3$ 的矩阵, 其列为 $c^i = [-(p^i + \beta q^i), \omega_1^i, \omega_2^i]^T$. 进一步, 令 $q^i = [q^1, \dots, q^m]^T$, $r^i = [r^1, \dots, r^m]^T$. 然后, 微分立体关系序列系统(37)可以被改写为

$$\tilde{C} \begin{bmatrix} z \\ (1 + \beta z)\pi_1 \\ (1 + \beta z)\pi_2 \end{bmatrix} = q^i + r^i \quad (38)$$

因为从命题 1 中可以得出 $\pi_3 = 0$. 用 \tilde{C}^+ 作为 \tilde{C} 的 Moore-Penrose 伪逆解, 令 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)^T = \tilde{C}^+ (q^i + r^i)$. 因此, (38)的解为:

$$[z, (1 + \beta z)\pi_1, (1 + \beta z)\pi_2]^T = \varepsilon \quad (39)$$

其遵循 $z = \varepsilon_1$ 生成曲面深度。

因此, 当 BRDF 和光照都是未知的时, 命题 8 能从微分立体产生表面深度。再次, 其与[4]中的对象运动时值得比较的。利用物体运动, 未知 BRDF 和光照遵循命题 1 恢复了深度和一个对梯度的约束。运用 BRDF 上的附加约束或光照, 是有可能恢复梯度上更进一步的信息。

5.2. 对特定材料的额外约束

如上所述, 我们现在表明, 对几种材料类型, 梯度上的额外约束是可用的。

命题 9. 在透视投影下, 三个或三个以上的微分运动镜头足以产生深度和对一个曲面的梯度上的一个线性约束, 且该曲面有依赖于已知光源和半角方向的 BRDF。

证明. 命题 8 已经表明 $m \geq 3$ 个微分运动镜头能恢复深度。更进一步, 对于(29)中的半角 BRDF 中的 π 的形式, 并运用(39), 我们得到:

$$\frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{a^T n}{b^T n} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \quad (40)$$

其中 a 和 b 都是依赖于光照的已知实体, (29)式定义了它们。最后, 用(4)式产生了一个深度上的线性 PDE:

$$l_1 z_x + l_2 z_y + l_3 = 0 \quad (41)$$

其中, $l_1 = \varepsilon_2 b_1 - \varepsilon_3 a_1$, $l_2 = \varepsilon_2 b_2 - \varepsilon_3 a_2$, $l_3 = \varepsilon_3 a_3 - \varepsilon_2 b_3$ 。因此我们得到一个对梯度的线性约束。

从上述结果明显可以看出, π_1 和 π_2 间存在的关系的导出可能不依赖于 BRDF 的倒数 ρ , 存在这种关系的材料能产生对曲面梯度的一个额外约束。这个约束的形式将映射 π_1 和 π_2 间的关系, 因为从(40)中可以看出他们的比率是一个可测量的量。特别是, 它遵循以下条件, 4.2.3 节中考虑的更多普遍情况可能派生出一个线性约束:

备注 2. 在透视投影下, 三个微分运动镜头足以产生深度和一个为 BRDF 的梯度上的线性约束, 而此 BRDF 依赖于已知光照和一个源-视平面上的任意方向。

5.3. 形状恢复

从命题 8 可以得出, 在透视情况下, 对于未知光照和未知 BRDF, 深度是可以直接得到的。图 3 用合成数据解释了其中的原因, 其中物体被置于未知光源下来成像。物体的直径为 20cm, 其被放置在距离焦距为 10cm 的相机 1.5m 的地方。我们赋予相机大约 2° 的旋转和 5mm 的平移等 2 种随机运动。图 3 显示了用 5.1 节中的理论恢复得到的形状。我们被要求没有 BRDF, 光照和深度方面的先验信息。

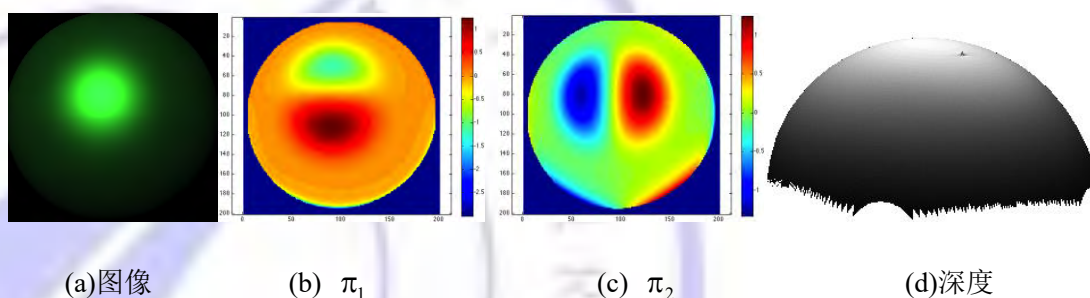
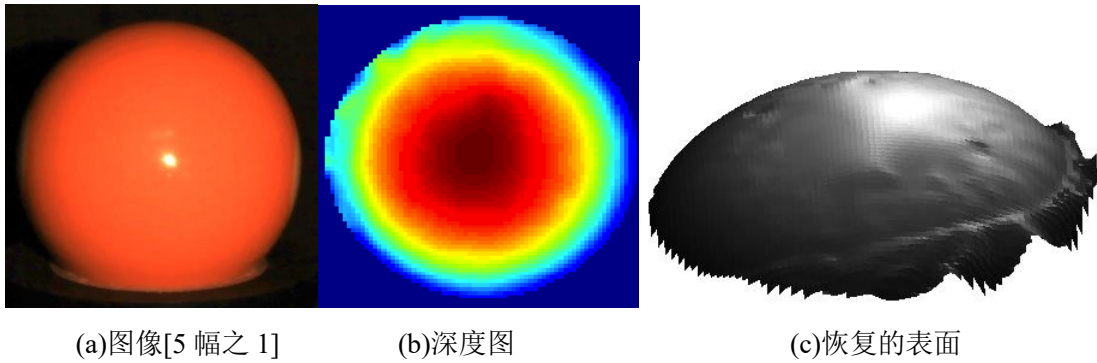


图 3. (a)透视投影下, 用任意非 Lambertian BRDF 和未知光照得出的四幅合成图像(三个运动)之一。(b,c)用(43)式恢复的 π_1 和 π_2 , 这在第六章节将会进行讨论。(d)用命题 8 计算得到的深度。



图像 4. 在未知光源下,用命题 8 重建的具有未知 BRDF 的一个非 Lambertian 球。

为了用真实数据进行估算,我们在有纹理的背景下用未知定向光照获得了图 4 中的塑料球图像。注意明确非 Lambertian 效应。相机的焦距是 55mm, 物体距其大约 80cm。我们赋予相机五个小运动(和一些为了稳定构成优化的大运动), 我们还用光束平差法对这些动作进行了估计从命题 8 获得的曲面深度图在图 4(b) 和(c)中进行了展示。

我们虽然不在本文中探讨方向问题,但注意,在已知光照下,我们可以用约束式(41)来解决一个联合深度和用 λ 加权的梯度优化:

$$\min_z (z - \varepsilon_1)^2 + \lambda(l_1 z_x + l_2 z_y + l_3)^2 \quad (42)$$

经过标准微分后,上面的式子就是可以被有效解决的 z 中一个高度稀疏的线性系统。

6. 从运动理论对物体进行透视

现在我们从光、物体或相机运动对应的运动理论角度提供一个统一的对形状的透视。尽管材料行为明显是复杂的,光照、物体或相机的微分运动能够恢复未知 BRDF 和光照经常未知的物体的形状。更重要的是,在这些框架中,从运动中得来的对形状的理论限制也都是可推导的。之前的作品中也已经展示了对光[2]和物体[4]运动的理论。本文研究了相机的运动,从而完成了对未知 BRD 的 F 物体的形状恢复的微分分析框架。

在表 2 中,我们从每一条理论中总结了一些结论。在每一种情况下,理论概括了假设有 Lambertian BRDF 或亮度恒常性的众所周知的特殊情况。我们只显示了对光照运动(泛化光度立体)的正交投影和对物体或相机运动(分别概括了光流和多视图立体)的透视投影。表[1]给出了完整情况。

这些理论都呈现的一些重要特征是：

运动	光照	BRDF	#动作	曲面限制	形状恢复	理论
光照	已知	Lambertian	2	Lin.梯度方程	梯度	[19]
光照	未知	一般, 未知	2	线性 PDE	阶层曲线+ $\ \nabla z\ $ 等高线	[2]
物体	亮度恒定		1	Lin.方程(光流)	深度	[7,9]
物体	同一地点	Uni 角, 未知	3	Lin.方程+ Homog 线性偏微分方程	深度+梯度	[4]
物体	未知	满, 未知	4	Lin.方程+ Homog 线性偏微分方程	深度+梯度	[4]
相机	亮度恒定		1	Lin.方程(立体)	深度	[15]
相机	未知	一般, 未知	3	Lin.方程	深度	命题 8
相机	已知	半角, 未知	3	Lin.方程+ Inhomog 线性偏微分方程	深度+梯度	命题 9

表 2. 表 2 统一地看从光照、物体或相机的运动中恢复形状的 BRDF-不变框架。在每一种情况中，PDE 不变量对形状恢复制定精确的拓扑限制。更一般的 BRDF 或成像设置要求更多的运动来获得重建不变量。更多的受限 BRDF 要求更少的运动或产生更丰富的形状信息。为了方便比较，表中还显示了传统的分散等同物。表中只显示了对物体和相机运动的透视情况(完整的表见[1])

- 它们都依赖于链式法则分化的线性，以消除方程组的 BRDF。
- 每一种情况下的不变量的特征在于，作于一个 PDE，其服从标准分析工具的解决方案。
- 所涉及的 PDE 提供了对拓扑的固有限制，其级别可到达形状可从每一个运动的线索来恢复形状，而不用考虑重建的方法。
- 更一般的成像设置要求更大数量的运动来恢复形状。例如，同一位置的照明需要比普通照明更少的运动，或者透视投影需要比正交投影更多的运动。
- 限制 BRDF 要么降低了运动数量的最低值(对于物体运动的同一位置的或一般的 BRDF),或者提供更丰富的形状恢复信息(对于相机运动的半角或一般的 BRDF)。

物体和相机运动的情况具有更密切的关系，但由于相机运动引起的额外模糊性，其又具有重要的区别。定性地说，这将为相机运动情况带来更难以解决的问题。困难的实际表现需要更多受限的 BRDF(尽管还是未知的)，以得到相同的形状信息。例如，一个半角 BRDF 能产生对相机运动的深度和梯度约束，尽管用一般 BRDF 也能的到对物体运动的相同约束。承认一个一般 BRDF 意味着仅仅可能得到相机运动的深度，尽管物体的运动产生了一个额外的梯度约束。在本文中，我们已经强调了这种区别以及它们对形状恢复的影响。

进一步的工作 我们的理论侧重于形状恢复，但一些 BRDF 信息也可能作为副产品被恢复了。例如，在透视投影下，命题 8 和 1 完整地定义了 π 。也就是说，从

(39)式，我们可以得到：

$$\pi=(1+\beta\varepsilon_1)^{-1}(\varepsilon_2, \varepsilon_3, 0)^T \quad (43)$$

图 3 显示了一个 π 被恢复的例子。相反，这为 BRDF 的导数施加了约束。未来工作的一条路就是用光源、物体或相机的运动表征可能恢复的 BRDF 的程度。

此外，虽然，对于每个成像元素，[2,4]和本文一同提供了从运动中恢复形状的限制，但一个有趣的问题是当光照、物体和相机都处于同时运动时，去获得相似的限制。我们还预计了健壮的估算方法的存在，其利用我们的理论，扩展了光流和多视角立体的传统工具，以处理一般的 BRDF。

参考文献

- [1] M. Chandraker. What camera motion reveals about shape with unknown BRDF. Technical Report 2014-TR044r, NEC Labs America, 2014.
- [2] M. Chandraker, J. Bai, and R. Ramamoorthi. A theory of differential photometric stereo for unknown isotropic BRDFs. In CVPR, pages 2505–2512, 2011.
- [3] M. Chandraker and R. Ramamoorthi. What an image reveals about material reflectance. In ICCV, pages 1076–1083, 2011.
- [4] M. Chandraker, D. Reddy, Y. Wang, and R. Ramamoorthi. What object motion reveals about shape with unknown BRDF and lighting. In CVPR, pages 2523–2530, 2013.
- [5] J. Clark. Active photometric stereo. In CVPR, pages 29–34, 1992.
- [6] H.W. Haussecker and D. J. Fleet. Computing optical flow with physical models of brightness variation. PAMI, 23(6):661–673, 2001.
- [7] B. Horn and B. Schunck. Determining optical flow. Artificial Intelligence, 17:185–203, 1981.
- [8] F. John. Partial Differential Equations. App. Math. Sci. Springer, 1981.
- [9] B. Lucas and T. Kanade. An iterative image registration technique with an application to stereo vision. In Image Understanding Workshop, pages 121–130, 1981.
- [10] M. Minnaert. The reciprocity principle in lunar photometry. Astrophysical Journal, 3:403–410, 1941.
- [11] H.-H. Nagel. On a constraint equation for the estimation of displacement rates in image sequences. PAMI, 11(1):13–30, 1989.
- [12] S. Negahdaripour. Revised definition of optical flow: Integration of radiometric and geometric cues for dynamic scene analysis. PAMI, 20(9):961–979, 1998.
- [13] I. Sato, T. Okabe, Q. Yu, and Y. Sato. Shape reconstruction based on similarity in radiance changes under varying illumination. In ICCV, pages 1–8, 2007.
- [14] S. Savarese, M. Chen, and P. Perona. Local shape from mirror reflections. IJCV, 64(1):31–67, 2005.
- [15] S. Seitz, B. Curless, J. Diebel, D. Scharstein, and R. Szeliski. A comparison and evaluation of multiview stereo reconstruction algorithms. In CVPR, pages 519–526, 2006.
- [16] J. T. Todd, J. F. Norman, J. J. Koenderink, and A. M. L. Kappers. Effects of texture,

illumination and surface reflectance on stereoscopic shape perception. *Perception*, 26(7):807–822, 1997.

[17] A. Treuille, A. Hertzmann, and S. Seitz. Example-based stereo with general BRDFs. In *ECCV*, pages 457–469, 2004.

[18] A. Verri and T. Poggio. Motion field and optical flow: Qualitative properties. *PAMI*, 11(5):490–498, 1989.

[19] P. Woodham. Photometric method for determining surface orientation from multiple images. *Opt. Engg.*, 19(1):139–144, 1980.

[20] T. Zickler, P. Belhumeur, and D. Kriegman. Helmholtz stereopsis: Exploiting reciprocity for surface reconstruction. *IJCV*, 49(2/3):1215–1227, 2002.

